Zusammenfassung: Algebra in der Sekundarstufe

nach H.-J. Vollrath, 2. Auflage 2003

Ergänzt durch Weigand/Weth: Computer im Mathematikunterricht, 1. Auflage 2002

Inhaltsverzeichnis

1 Algebra in der Schule

Klasse 5: Grundrechenarten, einfache Terme und Gleichungen, Lösen durch Probieren u.ä.

Klasse 6: $\mathbb{Q}^+$: Bruchrechnen, Rest analog

Klasse 7: Grundrechenarten in $\mathbb{Q}$, (anti)proportionale Funktionen, Rest analog

Klasse 8: natürliche Potenzen, Termumformung, lineare Funktionen, Funktionsgleichung, Lösung von Gleichungen durch Äquivalenzumformungen

Klasse 9: Quadrieren, Wurzelziehen, irrationale Zahlen, $\mathbb{R}$, entsprechende Funktionen, Terme, Gleichungen

Klasse 10: Potenzrechnung, Potenzfunktionen, Exponential-/Logarithmusfunktionen, trigonometrische Funktionen, entsprechende Gleichungen und Terme

Ziel des Mathematikunterrichts ist es, den Schülern *grundlegende Begriffe, Einsichten und Methoden der Mathematik* zu vermitteln; dabei leistet der Algebraunterricht:

- Vorstellungen und Einsichten über Zahlsystem, sinnvolle Anwendung und Beherrschung von Rechenregeln;
- Erlernen der Formelsprache (Variablen, Terme, ...);

- Erfassen des Funktionsbegriffs und Kenntnis wichtiger Typen;
- Erkenntnis von Zusammenhängen und Lösung von Problemen mittels Gleichungen.

Damit werden sowohl *inhaltliche* als auch *formale Ziele* verfolgt, und die vermittelten Fähigkeiten und Kenntnisse sind *wesentlicher Bestandteil der Allgemeinbildung*.

2 Zahlen

2.1 Was ist eine Zahl?

- *intuitives Verständnis:* Anzahl, Anteil, „Mächtigkeit“, ...;
- *inhaltliches Verständnis:* Eigenschaften wie Primfaktorzerlegung, Wissen um versch. Darstellungen von Bruchzahlen o.ä., Dezimal-, Dualsystem (→ Rechnergenauigkeit);
- *integriertes Verständnis:* Hierarchie der Zahlbereiche;
- *formales Verständnis:* Eigenschaften von Zahlen: Primzahl, Fermatzahl, Fakultät, Dreieckszahlen, ...;
- *strukturelles Verständnis:* Verknüpfung von Zahlen, Gesetzmäßigkeiten, ...

2.2 Lernen des Zahlbegriffs

Grundlegend ist dabei das *Lernen durch Erweiterung*, d.h. es werden

- Grenzen eines Bereiches bewusst überschritten,
- der neue Bereich erkundet,
- der alte Bereich eingebunden.

Schwieriger Punkt in der Praxis ist z.B. die Erarbeitung der Bruchzahlen und die Einbindung der natürlichen Zahlen.
Dem Erweitern überlagert ist ein Lernprozess in Stufen: Von einem intuitiven Zahlverständnis über ein inhaltliches Verständnis bis hin zum formalen Verständnis (algebraische Strukturen).
Vermittelte *Regeln* sollen dabei *einsichtig* gemacht werden, *anschaulich* und möglichst *verbal verankert* werden, sinnvoll in bisherige Regeln *eingebunden* und durch (Gegen)Beispiele zu anderen Regeln *abgegrenzt* werden.
Leitbegriff ist hierbei der Verknüpfungsbegriff.

2.3 Natürliche Zahlen

Untersuchung der Verknüpfungen (z.B. auf Kommutativität, was bei Addition klar ist, bei Multiplikation grafisch veranschaulicht werden kann), Teilbarkeitsrelationen, insbesondere der multiplikative Aufbau der natürlichen Zahlen durch Primzahlen.

2.4 Bruchzahlen

Rein algebraisch betrachtet würde es Sinn machen, zuerst die negativen (ganzen) Zahlen einzuführen, aber traditionell behandelt man zuerst $\mathbb{Q}^+$, insbesondere auch deshalb, weil diese Zahlen den Schülern schon etwas vertrauter sind und beispielsweise mittels wiederholter Teilung einer Strecke gut eingeführt werden können. Dagegen kennen Schüler negative Zahlen höchstens von Temperaturen her, evtl. noch Schulden.

Mögliche Zugänge zu den Bruchzahlen:

- Erweiterungsbereich: eher algebraisch formal.
- Größenbereiche: Bruchteile von Strecken, Bruchzahlen als Maßzahlen, intuitives Erarbeiten der Rechenregeln.
- Operatoren: zu großer Aufwand.
- Punkte auf Zahlenstrahl: Bruchzahlen als Skalenwerte, allerdings Schwierigkeiten bei Vermittlung der Multiplikation.

Typischerweise wird die Bruchrechnung in folgenden Schritten eingeführt:

1. Aufbau von Bruchvorstellungen: Torte, Strecke, Maßzahlen, Gleichungen;
2. Erweitern und Kürzen: Verfeinern und Vergröbern;
3. Addition und Subtraktion: erst bei gleichnamigen Brüchen, dann Gleichnamigmachen ungleichnamiger Brüche;
4. Multiplikation und Division: Hier Einsatz „gemäßigter“ Operatoren möglich:
   $\frac{3}{4} \xrightarrow{\cdot 5} \_\_ \xrightarrow{:7}$?; Multiplikation als wiederholte Addition, Division als Versiebenfachen der Einheit. Division durch Bruch dann über Umkehroperation:
   $\frac{15}{28} : \frac{3}{4}$ lösen durch Fragen nach jener Zahl, die mit $\frac{3}{4}$ multipliziert $\frac{15}{28}$ ergibt.
   Alternativ kann man auch mit Gleichungsketten arbeiten, siehe auch folgenden Punkt.

2.5 Rationale Zahlen

Um die negativen Zahlen einzuführen, kann man den Zahlenstrahl verwenden, also mit Skalen rechnen. Addition und Subtraktion einsichtig, Multiplikation mit negativer Zahl schwer zu verdeutlichen: Warum ist (-1) mal (-1) gleich +1?
Hier evtl. Rechenfolgen günstiger:

$$\begin{array}{rcr} 2 \cdot 5 &=& 10 \\ 1 \cdot 5 &=& 5 \\ 0 \cdot 5 &=& 0 \\ -1 \cdot 5 &=& -5 \\ -2 \cdot 5 &=& -10 \end{array}$$

Leider ist die verbale Regelformulierung recht schwierig, die Addition bereitet den Schülern insgesamt mehr Probleme als die Multiplikation, typische Fehler sind dabei

$$-7+5 \;=\; -12 \qquad \text{oder} \qquad -7+5 \;=\; 2.$$

2.6 Reelle Zahlen

Entdeckung irrationaler Zahlen z.B. über Diagonale im Einheitsquadrat und anschließenden Widerspruchsbeweis. Probleme mit indirekten Beweisgängen scheinen zumindest auf dem Gymnasium nicht feststellbar.
Näherungen solcher Wurzeln z.B. über Intervallschachtelungen[1] oder *Heron-Verfahren*:

$$\sqrt{a} \quad \rightarrow \qquad x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + \frac{a}{x_n}).$$

Die Rechenregeln sind über Intervallschachtelungen jedoch nicht vermittelbar, elementare Multiplikationsregeln kann man u.U. mit Hilfe des Strahlensatzes verdeutlichen (also reelle Zahlen als Längen), wo auf einem Ast eine feste Skala ist, auf dem anderen die geg. reelle Zahl, die man geeignet verbindet.

[1] z.B. *Halbierungsverfahren*: Suche $\sqrt{2}$ durch $[1;2] \rightarrow 1,5$, $[1;1,5] \rightarrow 1,25$, $[1,25;1,5] \rightarrow 1,375$, ...

Schließlich werden die Schüler erfahren, dass die Grundrechenregeln die gleichen bleiben, man jetzt aber stets auch Wurzeln aus positiven Zahlen ziehen kann.

Die Grundlage für die Analysis ist geschaffen.

2.7 Möglichkeiten des Computereinsatzes

- Erzeugen von Zahlen (z.B. mit EXCEL-Tabellen, z.B. Fakultäten, Kettenbrüche, ...);
- Durchführen von Berechnungen;
- Überprüfen von Ergebnissen.

Vom Benutzer wird dabei erfordert:

- Werkzeugkompetenz (Wissen, wie was eingesetzt werden kann);
- Operative Fähigkeiten (Wissen darüber, wie man es prinzipiell auch selbst machen könnte);
- Überprüfungs-/Testfähigkeit.

3 Terme

3.1 Formelsprache

Einführung der Variable als Platzhalter, der Formel als einer Art Rechenanweisung, vergleichbar einem tabellarischen Rechenschema à la EXCEL. In diesem Zusammenhang bietet sich der Einsatz des Selbigen im Unterricht an.

Der Wert der Formelsprache liegt u.a. darin, dass man erstens selbst in der Lage ist, seine eigenen mathematischen Vorstellungen auszudrücken, und sie zweitens anderen Menschen (auch anderer Nationalität) zugänglich zu machen. Vom mathematischen Standpunkt her können insbesondere allgemeingültige Gesetzmäßigkeiten erschlossen werden und Probleme formal präzisiert und anschließend gelöst werden.
Auch der Einsatz von Rechnern ist hier sinnvoll, denn obwohl er dem Schüler Umformungen abnimmt, muss der Schüler trotzdem in der Lage sein, seine Gedanken zu formulieren, muss Vorstellungen über die Berechnungsziele haben (sonst können sie ja gar nicht Befehle zu Umformungen auswählen) und letztlich das Ergebnis interpretieren können.

Das Lernen der Formelsprache vollzieht sich in folgenden Schritten:

1. Intuitiver Gebrauch der Sprache: Variablen ergeben sich aus konkreten Aufgaben. Platzhalter im eigentlichen Sinn, z.B. als Kästchen gemalt, oder in Tabellenform, wie etwa

x	y	$2 \cdot x$	$x + y$
1	2		
2	7		

   Ferner Aufstellen von Termen in Sachaufgaben.

2. Reflexion: Nachdenken über verwendete Variablen, Umformungen, Suche nach geeigneter Bezeichnungsweise. Hilfreich auch formale Betrachtung als Rechenschema. Gleichheit von Termen, man wird häufig verschieden aussehende Ansätze finden, nötig sind Termumformungen, diese werden dann sauber erarbeitet.

3. Erkundung und Aneignung: Regeln entdecken und aneignen.
   Schema: Ordnen (z.B. alphabetisch), Zusammenfassen (z.B. gleichartige Summen zu Produkten, gleichartige Produkte zu Potenzen), Klammern auflösen (Binomische Formeln, quadratische Ergänzung).

4. Nutzung der Sprache: neue Einsichten gewinnen (Lösungsformel o.ä.).

5. Erweitern der Sprache (Bruchterme, Wurzelterme, Potenzregeln).

6. Neue Sprachen: z.B. Übertragung in erweiterte Zahlbereiche o.ä., aber auch Schaltalgebra.

Typische Fehler in diesem Zusammenhang sind Fehler beim Auflösen von Klammern, Verwechseln von Termen (x^2 mit $2x$), Fehler beim Kürzen, Fehler beim Wurzelziehen ($\sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$, Linearisieren).

3.2 Computereinsatzmöglichkeiten

Der Einsatz von CAS macht das traditionelle *Termumformen* eigentlich überflüssig; trotzdem sollte der Schüler auch weiterhin in der Lage sein, dies sicher per Hand durchzuführen.
Die eigentliche Herausforderung wird aber darin bestehen, *Terme* (aus außer/innermathematischen Situationen heraus) *aufstellen* zu können und das Resultat am Ende einer Termumformung *interpretieren* und *überprüfen* zu können.
Auch dabei kann ein CAS hilfreich sein: grafische Untersuchungen (funktionaler) Eigenschaften erleichtern eine Interpretation, Überprüfen durch Einzelwerte, Wertetabellen, Grafik (Übereinanderlegen von Graphen) möglich.

4 Funktionen

Unterschiedliche Eigenschaften von Funktionen werden deutlich in ihren unterschiedlichen Darstellungsarten:

- Funktionen in Termdarstellung beschreiben die Art des Zusammenhangs, z.B. $x \mapsto ax + b$.
- Eigenschaften der Funktion selber werden deutlich bei Funktionalgleichungen, z.B. $f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2)$.
- Auch allgemeinere Aussageformen sind möglich, z.B. $x < y \;\Rightarrow\; f(x) < f(y)$.
- Geometrische Eigenschaften des Funktionsgraphen (z.B. Symmetrie, Periodizität) können an der Funktion abgelesen werden.

4.1 Zum Lehren des Funktionsbegriffes

Wir wollen nur, dass der allgemeine Funktionsbegriff in der einen oder anderen Eulerschen Auffassung den ganzen mathematischen Unterricht der höheren Schulen wie ein Ferment durchdringe; er soll gewiss nicht durch abstrakte Definitionen eingeführt, sondern an elementaren Beispielen, wie man sie schon bei Euler in großer Zahl findet, dem Schüler als lebendiges Besitztum überliefert werden. (Klein)

Unter *funktionalem Denken* versteht man den gedanklichen Umgang mit Funktionen, charakterisiert durch

- Zuordnungscharakter,
- Änderungsverhalten (Auswirkung von Änderungen einer Größe auf die abhängige Variable);
- Sicht als Ganzes (nicht nur einzelne Wertepaare, sondern z.B. den ganzen Graphen).

Erfahrungen aus der Umwelt sind für die Entwicklung funktionalen Denkens sehr wichtig:

1. Betrachten der Umwelt, Erkennen von Zusammenhängen (Füllhöhe Zylinder – Grundfläche, Brenndauer Kerze – Höhe);

2. Beschreiben der Umwelt, erst verbal, dann formal (z.B. Umfang Quadrat = 4 s);

3. Erklären der Umwelt ($U(s) = 4s \Rightarrow U(2s) = 2U(s)$);

4. Rationales Handeln in der Umwelt durch geeignete Berechnungen, Vorhersagen;

5. Erforschung der Umwelt durch Finden neuer Zusammenhänge (entdeckendes Lernen);

6. Kreatives Handeln in der Umwelt durch Vorgabe von Zusammenhängen, z.B. Dreiecks-/Tetraederfolge, Architektur, ...

Um die Komplexität der Umwelt zu verdeutlichen, macht auch die Betrachtung mehrdimensionaler Funktionen Sinn. Gerade hierbei ist wieder Computereinsatz sinnvoll, beispielsweise für graphische Darstellungen.
Das Lernen wird schließlich in mehreren Stufen erfolgen:

1. *Intuitives Verständnis:* Begriff als Phänomen: Fähigkeit, Zusammenhänge zu erkennen, Kenntnis grundlegender Funktionen und der Möglichkeit der Darstellung durch Graph oder Wertetabelle o.ä.

2. *Inhaltliches Verständnis:* Begriff als Träger von Eigenschaften (z.B. Monotonie, Symmetrie): Kenntnis spezifischer Eigenschaften von Funktionen und Fähigkeit, dieses Wissen zur Problemlösung einzusetzen.

3. *Integriertes Verständnis:* Begriff als Teil eines Begriffsnetzes: Erkennen von Zusammenhängen zwischen Eigenschaften (Steigung $\rightarrow$ Extremwert), formale Behandlung, Beweis.

4. *Strukturelles Verständnis:* Begriff als Objekt zum Operieren: Verknüpfung von Funktionen.

... aber auch durch Erweiterung:

1. proportionale Funktionen

2. lineare Funktionen

3. quadratische Funktionen

4. Potenzfunktionen

5. Exponentialfunktionen

6. Trigonometrische Funktionen

4.2 Der Funktionsbegriff im Unterricht

1. Vermittlung von Grunderfahrungen: Sachaufgaben (Wieviel kosten 350 g Käse?), biologische Zusammenhänge (Körpergröße – Gewicht), reale Graphen (zeitliche Entwicklung von Verkaufszahlen o.ä.).
   Experimentieren möglich: Wiegen von Nägeln, Wiegen von Kabeln bestimmter Länge, ...

2. Entdecken von Funktionseigenschaften: Proportionalität und umgekehrte Proportionalität o.ä.
   Auch Behandlung komplizierterer Vorgänge (Rabatte, Grundgebühr+Freibetrag, Parkplatzkosten, ...).

3. Aufdecken von Zusammenhängen: Proportionale Funktionen sind spezielle lineare Funktionen, letztere können str. mon. wachsen oder fallen oder konstant sein u.ä.
4. Entdeckung neuer Funktionstypen: Betragsfunktion, Treppenfunktion (z.B. Portokosten), quadratische Funktionen.
5. Problem der Umkehrfunktion (z.B. Wurzelfunktion).
6. Funktionen und Relationen (z.B. $\{(x, y) \mid y = x^2\}$).
7. Operieren mit Funktionen: Funktionen addieren, verknüpfen, iterieren.
8. Von Funktionen zu Folgen: Wiederholte Anwendung einer Funktion auf einen Startwert.
9. Erweiterungen: Potenz-/Exponentialfunktionen, Logarithmus, trigonometrische Funktionen.

Bezüglich eines Einsatz von CAS bieten sich an:

- Experimentieren, Auswirkung von Parametern (z.B. Funktionenschar)
- Verschiedene Darstellungsarten wie Graph, Wertetabelle
- Einsatz der Zoomfunktion
- Anpassung: Taylor, Regression, Interpolation, ...
- Kreativität: Bilder mittels Graphen zeichnen (Schiff, Brille, ...)
- Funktionen mehrerer Veränderlicher (z.B. auch Funktion mit Formparameter), Beispiele aus Physik, Flächen-/Volumenberechnung, ...

5 Gleichungen

Erste Erfahrungen mit Gleichungen sammeln Schüler bereits in der Grundschule, wo Gleichungen der Art „Welche Zahl muss ich einsetzen, damit...“ mehr intuitiv gelöst werden; etwas formaler wird es, wenn die Gegenaufgabe eingeführt wird.

In der 5. Klasse treten Gleichungen zusätzlich auf in Form von Rechengesetzen für natürliche Zahlen und beim Finden von Lösungen/Formeln für Sachaufgaben. Das Ganze wird dann ausgedehnt auf $\mathbb{Q}^+$ und schließlich $\mathbb{Q}$, dann werden formale Termumformungen behandelt.
Notwendige Begriffe sind (Un-)Gleichung, Lösung(smenge), Äquivalenzumformung, weitere logische Begriffe sollten eher vermieden werden. Das Verfahren der Gegenoperation führt dann schließlich hin zu den Äquivalenzumformungen, indem man von Schritt zu Schritt analysiert, was man auf beiden Seiten des „=“ eigentlich gemacht hat. Wichtige, aber umstrittene Veranschaulichungsmöglichkeit ist dabei das Waagemodell, welches bei negativen Zahlen oder Multiplikation und Division nicht mehr einsetzbar ist.
Wichtig ist auch, dass es leere Lösungsmenge geben kann, die Lösungsmenge von der Grundmenge abhängt ($\rightarrow$ Zahlbereichserweiterung), mehrelementige Lösungsmengen existieren (z.B. bei Ungleichungen).
Schließlich wird man algorithmische Lösungsverfahren entwickeln (Vereinfachen, Sortieren, Vereinfachen, Auflösen, ...).
Ergänzend kann man auch Gewinn- und Verlustumformungen betrachten (liefern notwendige bzw. hinreichende Bedingungen), wie z.B. Quadrieren bzw. Abschätzungen, wobei sich hier halt die Lösungsmenge ändert!

Behandeln wird man lineare Gleichungen und Ungleichungen sowie (Un)Gleichungssysteme, Bruchgleichungen. Außerdem können Schüler versuchen, Formeln (z.B. für kompliziertere Flächeninhalte) zu finden, interpretieren, auflösen, einsetzen.

Nach Einführung der reellen Zahlen wird man auch quadratische und Wurzelgleichungen behandeln, auch Gleichungen höheren Grades, wobei sich hier wieder Rechnereinsatz anbietet. Dabei kann auch auf Näherungsverfahren eingegangen werden.

Generelle Lösungsmöglichkeiten:

- Lösen durch (systematisches) Probieren, Intervallschachtelungen, ...
- Lösen durch Äquivalenzumformungen (z.B. auch quadratische Ergänzung)
- Lösen durch Lösungsformel
- Graphische Lösungsverfahren (z.B. mit CAS und Zoomfunktion)
- Numerisch-iterative Lösungsverfahren

6 Erkenntnis im Algebraunterricht

6.1 Sätze im Algebraunterricht

Explizit spricht man eher von Formeln, man beweist z.B. die binomischen Formeln, kann den binomischen Satz entdecken, Summenformeln aufstellen, Existenzsätze (z.B. über die Lösbarkeit von Gleichungen) behandeln. In puncto Beweis muss man den Schülern erst mal die Beweisbedürftigkeit deutlich machen, z.B. liefert $n^2 + n + 17$ nur für die ersten 16 Zahlen Primzahlen, Schüler würden vermuten, das muss immer so sein. Deutlich wird dann auch die Hierarchie von Einsichten, neue Aussagen zeigt man unter Zuhilfenahme bereits gezeigter.
Berücksichtigt werden muss dabei die Formalisierungsfähigkeit der Schüler im jeweiligen Alter, auch deren Kenntnis logischer Regeln.

6.2 Begriffsbildung im Algebraunterricht

Stichwort ist hierbei der Begriff der Definition, auch diesen müssen Schüler erst mal erfassen, unterscheiden zwischen zu definierendem Begriff und definierenden Eigenschaften. Auch hier ergibt sich wieder eine Hierarchie von Begriffen.