Zusammenfassung: Didaktik der Analysis

nach Tietze/Klika/Wolpers, 2. Auflage 2000, Kapitel 8

Inhaltsverzeichnis

1 Reelle Zahlen, Funktionen, Grenzwerte, Stetigkeit

Grundlage der Analysis bilden die reellen Zahlen und der Funktionsbegriff. Heutzutage wird man die Vollständigkeit der reellen Zahlen nicht mehr explizit betonen, sondern sie einfach benutzen, reelle Zahlen erfahren Schüler als Punkte auf der Zahlengeraden, als unendliche Dezimalbrüche.
Der Funktionsbegriff ist bei den Schülern oft nur schlecht verankert, sie kennen wenige Prototypen (Normalparabel), sehen Wertetabelle, Graph, Funktionsgleichung nur isoliert. Typsiche Fehlvorstellungen sind: Der Graph einer Funktion muss die x- und die y-Achse schneiden, die Funktionsgleichung muss x und y enthalten etc.
Schwierig ist schließlich die Einführung transzendenter Funktionen:

Exponentialfunktion:
1. Einführung durch stetige Fortsetzung: Verallgemeinerung der bekannten Potenzregeln, Funktionalgleichung $f(x+y) = f(x) \cdot f(y)$.
2. Anwendungsorientierter Zugang: Stetige Verzinsung von Kapital o.ä.

Logarithmusfunktion: Meist Einführung als Umkehrfunktion der Exponentialfunktion, möglich wäre aber auch $\ln x := \int_1^x \frac{dt}{t}$.

Trigonometrische Funktionen: Einführung über Dreiecksbeziehungen, Einheitskreis, Motivation durch Schwingungsvorgänge. Darauf aufbauend werden dann allgemeine Funktionseigenschaften abgeleitet.

Folgen- und Grenzwertbegriff sollten nicht unterschätzt werden, da der Approximationsgedanke eine fundamentale Idee der Analysis darstellt, und zudem solche Überlegungen bereits in der Mittelstufe (Iterationsverfahren zur Bestimmung von π) vorkommen ($\rightarrow$ *Spiralprinzip*). Schwierigkeiten bereiten den Schülern dabei vor allem die Häufung von Quantoren und unzureichende Kenntnisse bzgl. Ungleichungen. Rechnereinsatz ermöglicht nun aber einen mehr spielerischen Zugang zu dem Thema, wobei hier unbedingt auf Probleme mit der Rechnergenauigkeit zu verweisen ist! Formale Schwierigkeiten kann man durch Formulierungen wie „fast alle Folgenglieder müssen...“ abmildern, zu betonen ist auch, dass der Grenzwert auch im jeweiligen Wertebereich liegen muss.

Auf Grund fehlender Anwendungen wird der *Stetigkeitsbegriff* oft nicht behandelt. Etwas leichter für die Schule ist die Folgendefinition.

2 Differentialrechnung

Der Ableitungsbegriff kann prinzipiell auf zweierlei Art eingeführt werden:

- Änderungsrate: Mittlere Änderungsrate $\frac{f(x)-f(y)}{x-y}$ bzw. $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$. Als Beipiel kann man ein Fahrzeug betrachten, dass maximal eine Steigung von 30 % überlebt und einen (Funktions)Berg betrachten – kippt das Fahrzeug um?
- Lineare Approximation: Hier geht es um die optimale lineare Approximierende, sprich, die Tangente. Ansatz wäre dann $f(x+h) = f(x) + m \cdot h + R(h)$. Für diesen Einstieg sprechen die Bedeutung des Linearisierungskonzepts im Allgemeinen, auch dass sich diese Definition für Funktionen mehrerer Veränderlicher besser verallgemeinern lässt. Gerade weil aber das Restglied mit Schulmathematik nur schwer zu behandeln ist, hat sich heutzutage erster Weg durchgesetzt.

Wichtig ist, dass man auf jeden Fall mit den Schülern ein „grafisches Ab- und Aufleiten" durchführt, weil dadurch kalkülhafte und inhaltlich-anschauliche Aspekte verknüpft werden.
Die Ableitungsregeln werden folgendermaßen eingeführt:

- Monome x^n: $\frac{x^n-a^n}{x-a} = \frac{(x-a)(x^{n-1}+ax^{n-2}+...+a^{n-1})}{x-a}$ ... oder $\frac{(x+h)^n-x^n}{h} = \frac{x^n+nhx^{n-1}+h^2\cdot X}{h}$ ....
- Wurzel: Es ist $(\sqrt{x+h} + \sqrt{x}) \cdot \sqrt{x+h} - \sqrt{x}) = (x+h) - x = h$, woraus die Ableitung folgt.
- Produktregel etc. kann man durch geschicktes Ergänzen/Erweitern aus dem Differenzenquotienten herleiten.
- Winkelfunktionen: Hier nutzt man die Additionstheoreme, z.B. für $\sin(x+h) = ...$
- Exponentialfunktion: Schwieriger, man muss voraussetzen, dass $\lim_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h}$ existiert.
- Logarithmus: Entweder über allgemeine Ableitung von Umkehrfunktionen, oder direkt $\frac{\ln(x+h)-\ln x}{h} = \frac{\ln(1-\frac{h}{x})}{h} \cdot \frac{x}{x} = \frac{1}{x} \cdot \frac{\ln(1-\frac{h}{x})}{\frac{h}{x}}$, und vom letzten Faktor nimmt man wieder an, dass er gegen 1 geht.

Man kann bei beiden Letzteren auch die Stetigkeit der Funktionen nützen und dann z.B. den letzten Ausdruck durch Ersetzen von $\frac{h}{x} \to \frac{1}{n}$ auf $\ln(\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n)$ zurückführen.

Nachdem man über diese Werkzeuge verfügt, wird man sie Einsetzen, um Funktionen bzgl. Monotonie, Krümmung, Extrema und Wendestellen zu untersuchen.
Als Anwendungen bieten sich vor allem Extremwertaufgaben an und Aufgaben zur Funktionsbestimmung aus gegebenen Extrema u.ä.
Weitere Anwendungen können Interpolation und Approximation (Taylor, Newton) sein.

3 Integralrechnung

Prinzipiell bieten sich zwei Zugänge zum Integrationsbegriff[1] an:

- Flächeninhaltsaspekt: Gesucht ist der Flächeninhalt eines von einer Randkurve begrenzten Gebietes.
- Stammfunktionsaspekt: Zu geg. (stetiger) Funktion f ist eine Funktion F gesucht mit $F' = f$.

[1]Man beachte dabei: Das lateinische „integrare" bedeutet „wiederherstellen"!

Wegen des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung sieht man, dass beide Zugänge letztlich gleichwertig sind. Man kann versuchen, sie unter dem „Kumulationsaspekt“ zu vereinen, da negative Flächeninhalte stets Schwierigkeiten verursachen. Kumulation bedeutet dabei Aufsummieren, und ein Einführungsbeispiel wäre in diesem Sinne das Folgende:
Gegeben sei ein teilweise mit Wasser gefülltes Wasserbecken mit Zufluß und Abfluß, und unter verschiedenen Ausgangssituationen soll die momentan im Becken befindliche Wassermenge beschrieben werden. Einfachste Fälle sind konstanter Zufluß/Abfluß.
Dabei beobachtet man auch, dass die Zunahme der Wassermenge mit der Änderungsrate des Zu- und Abflußes zusammenhängt, man erhält einen Zusammenhang zur Stammfunktion. Schließlich ist eine saubere Definition des Riemannintegrals von Bedeutung.

Wenn man nun den Zusammenhang zwischen Funktionswert und entsprechender Fläche unter der Ableitung grafisch veranschaulichen will, tut man sich schwer, wenn man zuvor die Ableitung als Tangentensteigung eingeführt hatte. Hier ist die lokale Änderungsrate besser zu erkennen.

Argumentativ kann man den Hauptsatz wie folgt begründen: Erst zeigt man $F' = f$, anschließend folgert man mit bel. Intervalleinteilung:

$$\int_a^b f(x)\,dx \;\approx\; \sum_{i=1}^n f(x_{i-1})\cdot(x_i - x_{i-1}) \;=\; \sum_{i=1}^n F'(x_{i-1})\cdot(x_i - x_{i-1}) \;\approx\; \sum_{i=1}^n \frac{F(x_i) - F(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}}(x_i - x_{i-1}) \;=\; F(b) - F(a).$$

Es lassen sich nun folgende Aufgabentypen unterscheiden:

- Integrationsaufgaben mit Hilfe von Kumulation: Gemeint ist ein Unter- oder Obersummenansatz mit $\frac{1}{n}$-Intervallen, z.B. für $\int_0^a x^2\,dx$ berechnet man $\sum_{i=1}^n (i\frac{a}{n})\cdot\frac{a}{n} = \left(\frac{a}{n}\right)^3 \sum_{i=1}^n i^2 \to \frac{a^3}{3}$.
- Integrationsaufgaben mit Hilfe von Rekonstruktion (Aufleiten): Hier trifft man dann irgendwann auf die Lücke $\frac{1}{x}$.
- Analytische Integrationsverfahren (Sustitution, part. Int.): Nur im LK, mittels partieller Integration kann man die Taylorreihe herleiten.
- Numerische/grafische Verfahren: insbesondere in Kombination mit dem Rechner, begründet dadurch, dass sich viele Stammfunktionen nicht explizit angeben lassen.
- Anwendungen: Flächen-/Volumenberechnungen, Differentialgleichungen: Bei DGLs ist hier insbesondere an den Typ „Trennung der Variablen“ gedacht.